Opleiding: Middenkaderfunctionaris Bouw en Infra

Leerweg: BOL Niveau 4

Wiskunde 1-2

Periode 02

Opdrachten Week 05

Wortels met uitwerking

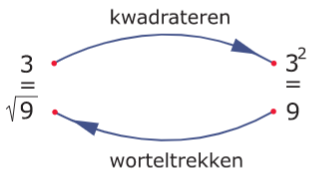
Te behalen cijfers = NVT

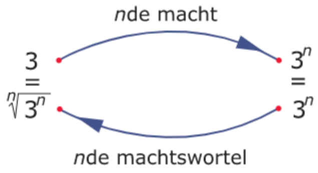
Naam: ______________________________

Klas: ______________________________

Datum: ______________________________

Uitleg 1





Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren.
n-de-machts worteltrekken is terugrekenen vanuit een $n$de macht. Zo geldt:

$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$
$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

Het rekenen met wortels gaat zo:

- $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{7 \cdot 5}$ en $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7 \cdot 5}$
- $\sqrt{7} / \sqrt{5} = \sqrt{7/5}$ en $\sqrt[3]{7} / \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{7/5}$
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.
- In de rekenvolgorde komen machten en wortels voor vermenigvuldigen en delen.

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

Opgave 51: (Bekijk uitleg 1)

In de Uitleg wordt behalve over "gewone" wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

a $\sqrt[3]{64}$

b $\sqrt[3]{-343}$

c $\sqrt[4]{16}$

d $\sqrt[4]{-16}$

e $\sqrt[5]{243}$

Opgave 51

a) $\sqrt[3]{64}$

$= 4$

want $4^3 = 64$

{wortels is terug rekenen van macht}

b) $\sqrt[3]{-343}$

$= -7$

want $(-7)^3 = -343$

{wortel is terug rekenen van macht}

c) $\sqrt[4]{16}$

$= 2$

want $(2^4) = 16$

{wortel is terug rekenen van macht}

d) $\sqrt[4]{-16}$

= bestaat niet! want − teken in de even wortel geeft geen antwoord

($\sqrt[4]{-}$ = Error

e) $\sqrt[5]{243}$

$\sqrt[5]{3^5} = (3^5)^{1/5} = 3^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 3^{5/5}$

$= 3$

Opgave 52: (Bekijk uitleg 1)

Bereken of benader de volgende wortels in drie decimalen nauwkeurig

a $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

b $\sqrt{1\frac{1}{4}}$

c $\sqrt[3]{66}$

d $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

Opgave 52

a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{9}{4}}$

$= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

$= \frac{3}{2} = 1{,}5 \Rightarrow 1{,}50$

b) $\sqrt{1\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{5}{4}}$

$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{2{,}236}{2} = 1{,}12$

c) $\sqrt[3]{66} = (66)^{\frac{1}{3}} \rightarrow$ m.b.v rekenmachine

$= 4{,}041$

d) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

$= \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

$= \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}$

$= \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2}}$

$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{3}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{3\cdot\frac{1}{3}}}{2^{3\cdot\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2} = 1{,}50$

Opgave 53: (Bekijk uitleg 1)

Bereken de volgende wortels en controleer het antwoord door machtsverheffen.

a $\sqrt{1024}$

b $\sqrt[5]{1024}$

c $\sqrt[10]{1024}$

Opgave 53

a) $\sqrt{1024}$

$= 32$

want $32^2 = 1024$.

b) $\sqrt[5]{1024}$

$= 4$

want $4^5 = 1024$.

c) $\sqrt[10]{1024}$

$= 2$

want $2^{10} = 1024$

Voorbeeld 1

Bij het rekenen moet je deze rekenvolgorde hanteren:

- H: je berekent eerst wat er binnen de haakjes staat (of in de teller en noemer van een breuk);
- MW: vervolgens machten en wortels van links naar rechts;
- VD: daarna vermenigvuldigen en delen van links naar rechts;
- OA: tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Je ziet dat machten en wortels gelijkwaardig zijn. Hetzelfde geldt voor vermenigvuldigen en delen en optellen en aftrekken. Met haakjes kun je de volgorde beïnvloeden: wat daarbinnen staat doe je eerst.

Bereken nu $2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \dfrac{2+6}{2^3}$.

$$\begin{aligned}
&2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{2+6}{2^3} \\
&= 2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8} \\
&= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{8}{8} \\
&= 8 + 6 - 4 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Opgave 54: (Bekijk voorbeeld 1)

Let op de rekenvolgorde en bereken.

a $4 \cdot 2^5 - \dfrac{400}{\sqrt{16}}$

b $\dfrac{\left(2^3 + 3^2\right)^2}{17} - \sqrt[3]{64}$

c $\left(2 \cdot \sqrt[3]{2}\right)^3$

Opgave 54

a) $4 \cdot 2^5 - \dfrac{400}{\sqrt{16}}$

$= 4 \cdot 32 - \dfrac{400}{4}$

$= 128 - 100$

$= 28$

b) $\dfrac{(2^3 + 3^2)^2}{17} - \sqrt[3]{64}$ (want $4^3 = 64$)

$= \dfrac{(8+9)^2}{17} - 4$

$= \dfrac{17^2}{17} - 4$

$= \dfrac{17 \cdot 17}{17} - 4 \Rightarrow 17 - 4 \Rightarrow 13$

54

c) $\left(2 \cdot \sqrt[3]{2}\right)^3$

$= 2^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^3$ want $\left(\frac{1}{3} \cdot 3 = 1\right)$

$= 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{3} \cdot 3}$

$= 8 \cdot 2^1$

$= 16$

Opgave 55: (Bekijk voorbeeld 1)

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $3 \cdot \sqrt{16} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b $\left(\sqrt[4]{10}\right)^8$

c $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

d $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{8}} - \sqrt[3]{2}$

Opgave 55

a)

$$3 \cdot \sqrt{16} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$$
$$= 3 \cdot \sqrt{16} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2}$$
$$= 3 \cdot 4 + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$
$$= 12 + \sqrt{16}$$
$$= 12 + 4$$
$$= \underline{\underline{16}}$$

want $\left(\begin{array}{l}\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ \sqrt{16} = \sqrt{4 \cdot 4}\end{array}\right)$

b)

$$\left(\sqrt[4]{10}\right)^8$$
$$= \left((10)^{\frac{1}{4}}\right)^8$$
$$= (10)^{\frac{1}{4} \cdot 8}$$
$$= 10^2$$
$$= 100$$

want $\sqrt[4]{10} = (10)^{\frac{1}{4}}$

Opgave 55

c)

$$\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$$
$$= \frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

(gelijk namig maken)

$$= \frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5 \cdot 5}}{\sqrt{5}}$$

$\left(\begin{array}{l}\sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{25} \\ = 5\end{array}\right)$

$$= \frac{10 - 5}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$5 = \sqrt{5^2}$

$$= \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{5 \cdot 5}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{5}$$

d)

$$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{8}} - \sqrt[3]{2}$$
$$= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}{\sqrt[3]{2^3}} - \sqrt[3]{2}$$
$$= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}{\sqrt[3]{2^3}} - \sqrt[3]{2}$$
$$= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} - \sqrt[3]{2}$$
$$= \frac{2 \cdot \cancel{2^{3 \cdot \frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{2}}{\cancel{2^{3 \cdot \frac{1}{3}}}} - \sqrt[3]{2}$$
$$= 2 \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$$
$$= \sqrt[3]{2}$$

Voorbeeld 2

Hier zie je hoe je met behulp van de rekenregels voor wortels uitdrukkingen kunt herleiden.

- $2 \cdot \sqrt{10} + \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{10} + \sqrt{10} = 3 \cdot \sqrt{10}$
- $2 \cdot \sqrt[3]{15} + 4 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = 2 \cdot \sqrt[3]{15} + 4 \cdot \sqrt[3]{15} = 6 \cdot \sqrt[3]{15}$
- $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$

Opgave 56: (Bekijk voorbeeld 1 en 2)

Bekijk de herleidingen in Voorbeeld 2 en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\sqrt{30} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}$

b $\left(\sqrt{5}\right)^5 - \sqrt{5}$

c $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \dfrac{5}{2\sqrt{10}}$

d $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} - \dfrac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}}$

Opgave 56

a)

$\sqrt{30} + 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}$

$= \sqrt{30} + 4\sqrt{2\cdot 15}$

$= \sqrt{30} + 4\sqrt{30}$

$= 5\sqrt{30}$

regels

$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}\right)$

$\left(1\cdot\sqrt{a} + 3\cdot\sqrt{a} = 4\sqrt{a}\right)$

b)

$(\sqrt{5})^5 - \sqrt{5}$

$= (\sqrt{5})^{2+2+1} - \sqrt{5}$

$= (\sqrt{5})^2\cdot(\sqrt{5})^2\cdot(\sqrt{5})^1 - \sqrt{5}$

$= 5\cdot 5\cdot\sqrt{5} - \sqrt{5}$

$= 25\sqrt{5} - \sqrt{5}$

$= 24\sqrt{5}$

c)

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} + \dfrac{5}{2\sqrt{10}}$

$\sqrt{2\cdot 5} + \dfrac{5}{2\sqrt{10}}$

$\sqrt{10} + \dfrac{5}{2\sqrt{10}}$

$\dfrac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{10} + \dfrac{5}{2\sqrt{10}}$ gelijk namig make

$\dfrac{2\sqrt{10\cdot 10}}{2\sqrt{10}} + \dfrac{5}{2\sqrt{10}}$

$= \dfrac{2\cdot 10}{2\sqrt{10}} + \dfrac{5}{2\sqrt{10}}$

$= \dfrac{20+5}{2\sqrt{10}}$

$= \dfrac{25}{2\sqrt{10}}$

d)

$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3} - \dfrac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{6}}$

$= \sqrt[3]{2\cdot 3} - \dfrac{\sqrt[3]{6\cdot 6}}{\sqrt[3]{6}}$

$= \sqrt[3]{6} - \dfrac{\sqrt[3]{6}\cdot\cancel{\sqrt[3]{6}}}{\cancel{\sqrt[3]{6}}}$

$= \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{6}$

$= 0$

Opgave 57: (Bekijk voorbeeld 1 en 2)

Bereken.

a $\left(\sqrt{81}-4\right)^2 / \left(5^2-\sqrt{6^2+8^2}\right)$

b $\sqrt[3]{10^2/2+4\cdot 5-\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}$

Opgave 57 a) $(\sqrt{81}-4)^2 / (5^2-\sqrt{6^2+8^2})$

$= (9-4)^2 / (25-\sqrt{36+64})$

$= 5^2 / (25-\sqrt{100})$

$= 25 / (25-10)$

$= 25/15$

$= 5/3$

b)

$\sqrt[3]{10^2/2+4.5-\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}}$

$= \sqrt[3]{\frac{100}{2}+20-\sqrt{3.12}}$

$= \sqrt[3]{50+20-\sqrt{36}}$

$= \sqrt[3]{70-6}$

$= \sqrt[3]{64}$

$= 4$

Opgave 58: (Bekijk voorbeeld 1 en 2)

Een balk heeft ribben van 4, 8 en 12 cm.

a Bereken de lengtes van alle mogelijke zijvlaksdiagonalen.

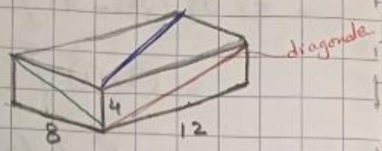
b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

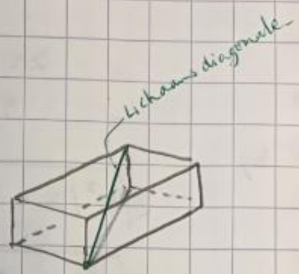
Opgave 58 a)

① diagonaal $= \sqrt{4^2+12^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

② diagonaal $= \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

③ diagonaal $= \sqrt{12^2+8^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$





b)

Lichaamsdiagonaal $= \sqrt{12^2+8^2+12^2} = \sqrt{222} = 4\sqrt{14}$

Opgave 59: (Bekijk voorbeeld 1 en 2)

Bereken.

a $(2^5 - 12) \,/\, (\sqrt{64} - \sqrt{9})$

b $(\sqrt{75} \,/\, \sqrt{3} - 2)^4$

Opgave 59 a) $(2^5-12)/(\sqrt{64}-\sqrt{9})$

$= (32-12)/(8-3)$

$= 20/5$

$= 4$

b) $(\sqrt{75}/\sqrt{3}-2)^4$

$\left(\frac{\sqrt{3\cdot 25}}{\sqrt{3}} - 2\right)^4$

$\left(\frac{\sqrt{3}\cdot 5}{\sqrt{3}} - 2\right)^4 = (5-2)^4$

$= 3^4 = 81$

Opgave 60: (Bekijk voorbeeld 1 en 2)

Herleid.

a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{30} / \sqrt{2}$

b $\sqrt{162} - \sqrt{32}$

opgave 60 a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{30} / \sqrt{2}$

$= \sqrt{3 \cdot 5} + 4 \cdot \frac{\sqrt{15 \cdot 2}}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{15} + \frac{4 \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{15} + 4 \cdot \sqrt{15}$

$= 5\sqrt{15}$

b)

$\sqrt{162} - \sqrt{32}$

$= \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9} - \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 4}$

$= 9\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}$

2	162
9	81
9	9
	1

2	32
4	16
	4